

Семинар 6. Магнитное поле квазистационарных токов

Краткая теория

Определения. Элементом тока называется величина $Id\vec{l}$, где $d\vec{l}$ – вектор элементарного перемещения заряда, связанного с его направленным движением. Ток, распределённый по проводнику конечного сечения и длины представляется в виде суперпозиции элементов тока $(\vec{j}d\vec{S})d\vec{l}$. Для точечного заряда q , движущегося со скоростью $\vec{V}$ (частный случай тока) элементом тока является произведение $q\vec{V}$.

Закон Био-Саварра-Лапласа (сила взаимодействия двух элементов тока):

$$d\vec{F} = \frac{m_0}{4\pi} \cdot \frac{[I_1 d\vec{l}_1, [I_2 d\vec{l}_2, \vec{r}_{12}]]}{r_{12}^3}$$

Закон Био-Саварра-Лапласа (магнитного индукция, создаваемая элементом тока):

$$d\vec{B} = \frac{m_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{l}, \vec{r}]}{r^3},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведённый от элемента тока к точке, в которой определяется индукция.

Из п.2 следует, что на проводник с током в магнитном поле действует сила (**сила Ампера**):

$$d\vec{F} = [Id\vec{l}, \vec{B}]$$

Аналогично, на заряд, движущийся в магнитном поле, действует **сила Лоренца**:

$$\vec{F} = q[\vec{V}, \vec{B}]$$

Теорема о циркуляции. Циркуляция вектора магнитной индукции по любому замкнутому контуру равна силе тока, пронизывающего этот контур, умноженной на магнитную постоянную:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = m_0 I$$

Типы задач

- | | |
|---|---|
| 1. Расчёт магнитной индукции «в лоб» (по закону Б-С-Л). | 7.1, 7.2, 7.17 |
| 2. Расчёт магнитной индукции по принципу суперпозиции. | 7.3, 7.5, 7.6, 7.7, 7.9, 7.14, 7.15, 7.16, 7.19 |
| 3. Расчёт магнитной индукции по теореме о циркуляции. | 7.4, 7.8 |
| 4. Сила Ампера. | 7.10, 7.11, 7.20 |
| 5. Сила Лоренца. | 7.12, 7.13, 7.18 |

Важные примеры из книжки

Примеры 7.1 и 7.4

В примере 7.4 имеет смысл запомнить ответ, он будет использоваться в будущем. Магнитная индукция соленоида, по которому течёт ток I , в точке на его оси, из которой торцы соленоида видны под углами b_1 и b_2 :

$$\vec{B} = \frac{m_0 I n_0}{2} (\cos b_2 - \cos b_1) \vec{e}_z$$

Здесь n_0 – концентрация витков соленоида (отношение числа витков к длине соленоида). Если витки соленоида намотаны вплотную друг к другу, то соленоид эквивалентен цилиндру, по поверхности которого течёт кольцевой ток, поверхностная плотность которого равна In_0 .

Задачи с решениями

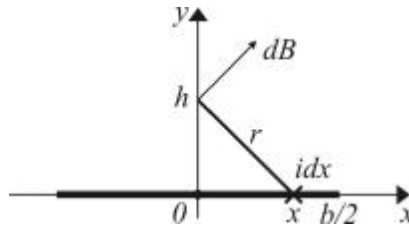
7.1. В примере 7.1 было получено выражение для магнитной индукции отрезка прямого тока конечной длины:

$$\vec{B} = \frac{m_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_j$$

Магнитная индукция прямоугольного контура, таким образом, есть суперпозиция полей четырёх отрезков:

$$\begin{aligned} \vec{B} = & \frac{m_0 I}{4\pi a/2} \left(2 \frac{b/2}{\sqrt{(b/2)^2 + (a/2)^2}} \right) + \frac{m_0 I}{4\pi a/2} \left(2 \frac{b/2}{\sqrt{(b/2)^2 + (a/2)^2}} \right) + \\ & + \frac{m_0 I}{4\pi b/2} \left(2 \frac{a/2}{\sqrt{(b/2)^2 + (a/2)^2}} \right) + \frac{m_0 I}{4\pi b/2} \left(2 \frac{a/2}{\sqrt{(b/2)^2 + (a/2)^2}} \right) = \frac{2m_0 I \sqrt{b^2 + a^2}}{\pi ab} \end{aligned}$$

7.2 и 7.7. Понятие линейной плотности тока проще всего продемонстрировать на примере тока, текущего по ленте шириной b . Плотность тока по определению есть отношение силы тока к площади поперечного сечения, через которую он протекает. Если же ток течёт по бесконечно тонкой ленте, то площадь поперечного сечения, как таковая, отсутствует. Однако можно ввести линейную плотность тока, поделив силу тока в ленте на её ширину. Линейная плотность тока аналогична поверхностной плотности заряда в электростатике и играет столь же весомую роль.



В задаче 7.2 плоскость представляет собой бесконечно широкую полосу и может быть представлена в виде суперпозиции бесконечных прямых проводов с током idx каждый, где x – координатная ось, лежащая в плоскости тока и перпендикулярная плотности тока (см. рисунок). Магнитная индукция одного из таких прямых проводов и её проекции на оси координат равны, соответственно:

$$dB = \frac{m_0 idx}{2\pi r}, \quad dB_x = \frac{m_0 idx}{2\pi r} \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}, \quad dB_y = \frac{m_0 idx}{2\pi r} \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}.$$

Интегрируя для полосы конечной ширины b , получим:

$$dB_x = \frac{m_0 i}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d(x/h)}{1 + (x/h)^2} = \frac{m_0 i}{\pi} \arctg\left(\frac{b}{2h}\right), \quad B_y = 0.$$

Нетрудно получить индукцию от бесконечной полосы:

$$dB = \frac{m_0 i}{2}$$

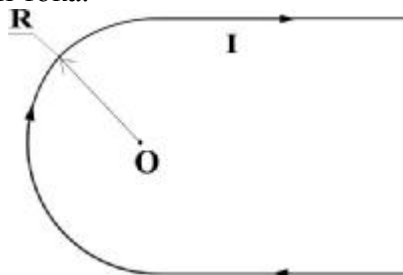
В результате мы получили также ответ в задаче 7.7, если заменить линейную плотность тока i на I/b .

7.4. В этой задаче также можно воспользоваться принципом суперпозиции, разбив задачу на множество параллельных бесконечных проводов с током $Idj/2\pi$ каждый (j – угол полярной системы координат, соосной с цилиндром в задаче). Поскольку при таком подходе получаются громоздкие интегралы, воспользуемся теоремой о циркуляции. Выберем в качестве воображаемого контура окружность, соосную с цилиндром и проходящую через точку в которой мы будем интересоваться величиной магнитной индукции. Циркуляция

магнитной индукции по этой окружности в силу симметрии задачи равна произведению индукции на длину окружности – $B2\pi r$. Если радиус окружности меньше радиуса цилиндра, то сила тока, пронизывающего окружность будет равна нулю, откуда $B=0$ внутри цилиндра. Для окружности, обхватывающей цилиндр, пронизывающая её сила тока равна I , и поэтому индукция вне цилиндра уменьшается по закону

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

7.10. На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера (см. теорию). Поскольку магнитная индукция параллельна прямым проводам (пусть для определённости она направлена направо), то сила Ампера на них равна нулю. Остаётся определить силу Ампера, действующую на полуокружность. Пусть α – угол между показанным на рисунке радиусом и горизонталью. Тогда элементарная сила Ампера на элемент тока, находящийся в конце отмеченного радиуса будет равна $dF = I(Rda)B\cos\alpha$ и направлена «от нас», как и силы на все остальные элементы тока.



Интегрируя последнее выражение, получим:

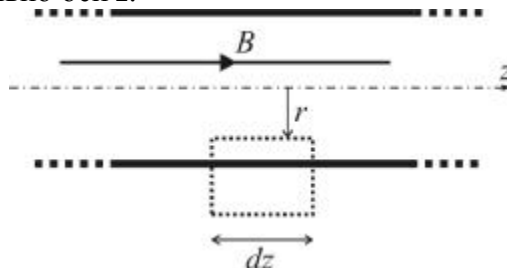
$$F = IBR \int_{-p/2}^{p/2} \cos\alpha d\alpha = 2IBR$$

7.19. На рисунке ось цилиндра показана штрих-пунктирной линией и совпадает с осью z . Магнитное поле создаётся круговыми токами, образованными движущимися вместе с цилиндром зарядами. Произвольный кольцевой ток при этом равен заряду этого кольца, делённому на период обращения цилиндра, то есть

$$dI = \frac{r(dz2\pi r dr)}{2\pi / w} = wr r dr dz,$$

где в круглые скобки взят объём элементарного кольца с толщиной dz и с радиусом r .

Исходя из бесконечности цилиндра индукция вне его равна нулю. Для определения магнитной индукции внутри цилиндра воспользуемся теоремой о циркуляции. Пусть угловая скорость цилиндра совпадает с осью z . Тогда части цилиндра, изображённые на рисунке под осью z , движутся «от нас». Из симметрии задачи магнитная индукция может быть направлена только параллельно оси z .



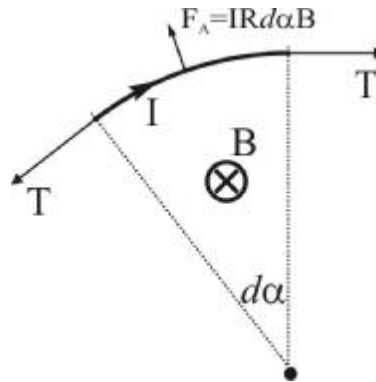
Выберем воображаемый контур в виде прямоугольника, изображённого на рисунке пунктиром. Циркуляция магнитной индукции по этому контуру по определению равна Bdz , где B – индукция внутри цилиндра на расстоянии r от оси. Сила тока, пронизывающего этот контур, равна:

$$dI = wr dz \int_r^R r dr = wr dz \frac{R^2 - r^2}{2}$$

Таким образом, по теореме о циркуляции:

$$Bdz = m_0 w r dz \frac{R^2 - r^2}{2} \Rightarrow B = m_0 w r (R^2 - r^2) / 2 .$$

7.20. Рассмотрим элементарную дугу кольца. На неё действуют две силы натяжения со стороны оставшейся части кольца и сила ампера, перпендикулярная дуге в плоскости рисунка.



Поскольку кольцо при этом ещё не разрывается, то есть находится в покое, то сумма сил, действующих на дугу должна быть равна нулю, то есть

$$2T(d\alpha / 2) = IRB d\alpha \Rightarrow I = T / RB$$

Задачи для самостоятельного решения

7.3, 7.5, 7.9, 7.11, 7.12 7.13, 7.15, 7.16.

Литература

Н.В. Нетребко, И.П. Николаев, М.С. Полякова, В.И. Шмальгаузен. Электричество и магнетизм. Практические занятия по физике для студентов-математиков. Часть III. Москва: Макс Пресс, 2006 г.